# 第 3 节 椭圆中的设点设线方法（★★★☆）

## 强化训练

1．（2023・海南琼海模拟・★★）设 $F_1$，$F_2$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 $A$ 为椭圆的上顶点，点 $B$ 在椭圆上且满足 $\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$，则椭圆的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{2}{3}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

**答案**：D

**解析**：条件 $\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$ 不易用几何方法翻译，可设坐标处理，

由题意，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$A(0,b)$，设 $B(x_0,y_0)$，

则 $\overrightarrow{F_1A}=(c,b)$，$\overrightarrow{F_2B}=(x_0-c,y_0)$，因为 $\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$，所以 $\begin{cases}c=5(x_0-c)\\b=5y_0\end{cases}$，故 $x_0=\dfrac{6c}{5}$，$y_0=\dfrac{b}{5}$，

代入椭圆方程得：$\dfrac{36c^2}{25a^2}+\dfrac{b^2}{25b^2}=1$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

2．（★★）已知 $M(x_0,y_0)$ 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上的一点，$F_1$，$F_2$ 是 $C$ 的两个焦点，若 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}>0$，则 $y_0$ 的取值范围是（　　）

（A）$(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$　　（B）$(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$　（C）$(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3})$　（D）$(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$



**答案**：A

**解析**：由题意，$F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，

所以 $\overrightarrow{MF_1}=(-\sqrt{2}-x_0,-y_0)$，$\overrightarrow{MF_2}=(\sqrt{2}-x_0,-y_0)$，

故 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=(-\sqrt{2}-x_0)(\sqrt{2}-x_0)+(-y_0)^2=x_0^2+y_0^2-2$ ①，

目标是求 $y_0$ 的范围，故利用椭圆的方程消去 $x_0$，

由点 $M$ 在椭圆 $C$ 上得 $\dfrac{x_0^2}{3}+y_0^2=1$，所以 $x_0^2=3-3y_0^2$，

代入①得 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=3-3y_0^2+y_0^2-2=1-2y_0^2$，

由题意，$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}>0$，所以 $1-2y_0^2>0$，故 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<y_0<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3．（2021・全国乙卷・★★）设 $B$ 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ 的上顶点，$P$ 在 $C$ 上，则 $|PB|$ 的最大值为（　　）

（A）$\dfrac{5}{2}$　　（B）$\sqrt{6}$　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）2

**答案**：A

**解法 1**：$|PB|$ 可用两点间距离公式算，故设点 $P$ 的坐标，

由题意，$B(0,1)$，设 $P(x_0,y_0)$，则 $|PB|^2=x_0^2+(y_0-1)^2$ ①，

上式有 $x_0$ 和 $y_0$ 两个变量，可利用椭圆方程消元，$x_0$ 只有平方项，故消 $x_0$，

由点 $P$ 在椭圆 $C$ 上可得 $\frac{x_0^2}{5}+y_0^2=1$，所以 $x_0^2=5-5y_0^2$，

代入①得 $|PB|^2=5-5y_0^2+y_0^2-2y_0+1=-4y_0^2-2y_0+6$

$=-4(y_0+\frac{1}{4})^2+\frac{25}{4}$，$-1\le y_0\le 1$，

所以当 $y_0=-\frac{1}{4}$ 时，$|PB|^2$ 取得最大值 $\frac{25}{4}$，故 $|PB|_{\max}=\frac{5}{2}$.

**解法 2**：也可将点 $P$ 的坐标设为三角形式，

由题意，$B(0,1)$，可设 $P(\sqrt{5}\cos\theta,\sin\theta)$，

则 $|PB|=\sqrt{(\sqrt{5}\cos\theta)^2+(\sin\theta-1)^2}$

$=\sqrt{5\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta+1}$，

将 $\cos^2\theta$ 换成 $1-\sin^2\theta$，可统一函数名，

所以 $|PB|=\sqrt{5(1-\sin^2\theta)+\sin^2\theta-2\sin\theta+1}$

$=\sqrt{-4\sin^2\theta-2\sin\theta+6}=\sqrt{-4(\sin\theta+\frac{1}{4})^2+\frac{25}{4}}$，



故当 $\sin\theta=-\frac{1}{4}$ 时，$|PB|$ 取得最大值 $\frac{5}{2}$.

4.（2010 • 福建卷 • ★★★）若点 $O$ 和 $F$ 分别是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的中心和左焦点，点 $P$ 为椭圆上的任意一点，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的最大值为（　　）

（A）2　（B）3　（C）6　（D）8

**答案**：C

**解法 1**：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 可方便地用坐标计算，故设 $P$ 的坐标，

由题意，$F(-1,0)$，设 $P(x_0,y_0)(-2\le x_0\le 2)$，则 $\overrightarrow{OP}=(x_0,y_0)$，

$\overrightarrow{FP}=(x_0+1,y_0)$，所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}=x_0(x_0+1)+y_0^2$ ①，

有两个变量，可用椭圆方程消元，$y_0$ 只有平方项，故消 $y_0$，

因为 $P$ 在椭圆上，所以 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，故 $y_0^2=3(1-\frac{x_0^2}{4})$，

代入①得 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}=x_0(x_0+1)+3(1-\frac{x_0^2}{4})=\frac{1}{4}(x_0+2)^2+2$，

所以当 $x_0=2$ 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 取得最大值 6.

**解法 2**：对于椭圆上的动点，也可将其坐标设为三角形式，

由题意，$F(-1,0)$，可设 $P(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$，

则 $\overrightarrow{OP}=(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$，$\overrightarrow{FP}=(2\cos\theta+1,\sqrt{3}\sin\theta)$，

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}=2\cos\theta(2\cos\theta+1)+3\sin^2\theta=4\cos^2\theta+$

$2\cos\theta+3\sin^2\theta=\cos^2\theta+2\cos\theta+3=(\cos\theta+1)^2+2$，

故当 $\cos\theta=1$ 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 取得最大值 6.

5.（★★★）已知圆 $C_1:x^2+y^2=b^2$ 和椭圆 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线 $y=kx(k\in\mathbf{R})$ 与 $C_1$ 的一个交点为 $A$，与 $C_2$ 的一个交点为 $B$，若 $\dfrac{|OB|}{|OA|}$ 的取值范围是 $(1,2]$，则椭圆 $C_2$ 的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$\dfrac{3}{4}$

**答案**：C

**解析**：由题意，$|OA|=b$，所以只需看 $|OB|$ 的取值范围，

由例 1 的变式可知椭圆上动点到其中心的距离的取值范围是 $[b,a]$，因为直线 $y=kx$ 的斜率存在，所以 $B$ 不与上、下顶点重合，故 $b<|OB|\le a$，所以 $1<\dfrac{|OB|}{|OA|}\le\dfrac{a}{b}$，

由题意，$\dfrac{|OB|}{|OA|}$ 的取值范围是 $(1,2]$，所以 $\dfrac{a}{b}=2$，



从而 $a=2b$，故 $a^2=4b^2=4(a^2-c^2)$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}$，

所以椭圆 $C_2$ 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6.（★★★）点 $P$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上运动，则当点 $P$ 到直线 $l:x+y-4=0$ 的距离最小时，点 $P$ 的坐标为_____.

**答案**：$(\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\dfrac{\sqrt{5}}{5})$

**解法 1**：$P$ 在椭圆上运动，可将其坐标设为三角形式，用于分析最值，

设 $P(2\cos\theta,\sin\theta)$，则点 $P$ 到直线 $l$ 的距离 $d=\dfrac{|2\cos\theta+\sin\theta-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{4-\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)}{\sqrt{2}}$，

其中 $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，$d$ 取得最小值，

目标是求 $d$ 最小时点 $P$ 的坐标，故可由 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 求出 $\theta$，代入所设的点 $P$，

$\sin(\theta+\varphi)=1\Rightarrow\theta+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})\Rightarrow\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi$，所以 $\cos\theta=\cos(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\sin\theta=\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故点 $P$ 的坐标为 $(\frac{4\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})$.

**解法 2**：先画图分析距离最小的情形，如图，$l' \,//\, l$，且 $l'$ 与椭圆 $C$ 相切于点 $P$，图中的点 $P$ 到直线 $l$ 的距离最小，要求该切点 $P$，先设切线，并与椭圆联立，

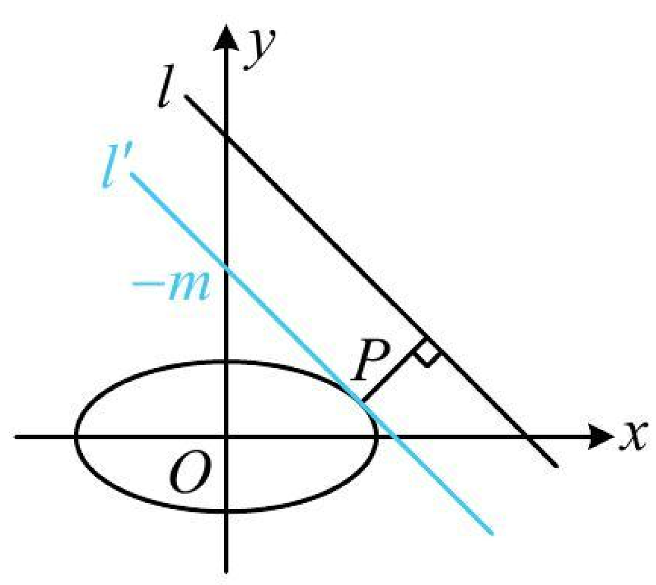
设图中 $l': x+y+m=0$，联立 $\begin{cases}x+y+m=0\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 消去 $y$ 整理得：$5x^2+8mx+4m^2-4=0$ ①，

因为 $l'$ 与椭圆相切，所以方程①的判别式 $\Delta=64m^2-4\times5\times(4m^2-4)=0$，解得：$m=\pm\sqrt{5}$，

应取哪一个呢？可结合图形来看，$x+y+m=0\Rightarrow y=-x-m\Rightarrow$ 直线 $l'$ 在 $y$ 轴上的截距是 $-m$，

由图可知 $-m>0$，所以 $m<0$，从而 $m=-\sqrt{5}$，故 $l'$ 的方程为 $x+y-\sqrt{5}=0$ ②，

将 $m=-\sqrt{5}$ 代入①解得：$x=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，代入②可得 $y=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以点 $P$ 的坐标为 $(\frac{4\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})$.




7.（2022·上海模拟·★★★★）已知定点 $A(a,0)(a>0)$ 到椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的点的距离的最小值为 1，则 $a$ 的值为_____.



**答案**：2 或 4

**解析**：设 $P(x,y)$ 为椭圆上一点，则 $|PA|^2=(x-a)^2+y^2$ ①，

上式中有 $x$ 和 $y$ 两个变量，可利用椭圆方程消元，$y$ 只有平方项，故消 $y$，

因为点 $P$ 在椭圆上，所以 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，故 $y^2=4-\frac{4}{9}x^2$，

代入①得：$|PA|^2=x^2-2ax+a^2+4-\frac{4}{9}x^2=\frac{5}{9}x^2-2ax+a^2+4$，其中 $-3\le x\le3$，

记 $f(x)=\frac{5}{9}x^2-2ax+a^2+4(-3\le x\le3)$，因为 $|PA|_{\min}=1$ 且 $f(x)=|PA|^2$，所以 $f(x)_{\min}=1$，

下面求 $f(x)_{\min}$，$f(x)$ 的参数 $a>0$，求最值应分对称轴 $x=\frac{9a}{5}$ 在区间内和在区间右侧两种情况讨论，

当 $0<\frac{9a}{5}\le3$ 时，$0<a\le\frac{5}{3}$，如图 1，$f(x)_{\min}=f(\frac{9a}{5})=\frac{5}{9}\cdot(\frac{9a}{5})^2-2a\cdot\frac{9a}{5}+a^2+4=4-\frac{4a^2}{5}$，

令 $4-\frac{4a^2}{5}=1$ 解得：$a=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$，均不满足 $0<a\le\frac{5}{3}$，舍去；

当 $\frac{9a}{5}>3$ 时，$a>\frac{5}{3}$，如图 2，$f(x)_{\min}=f(3)=\frac{5}{9}\times3^2-2a\cdot3+a^2+4=a^2-6a+9$，

令 $a^2-6a+9=1$ 解得：$a=2$ 或 4，均满足 $a>\dfrac{5}{3}$；

综上所述，$a$ 的值为 2 或 4.

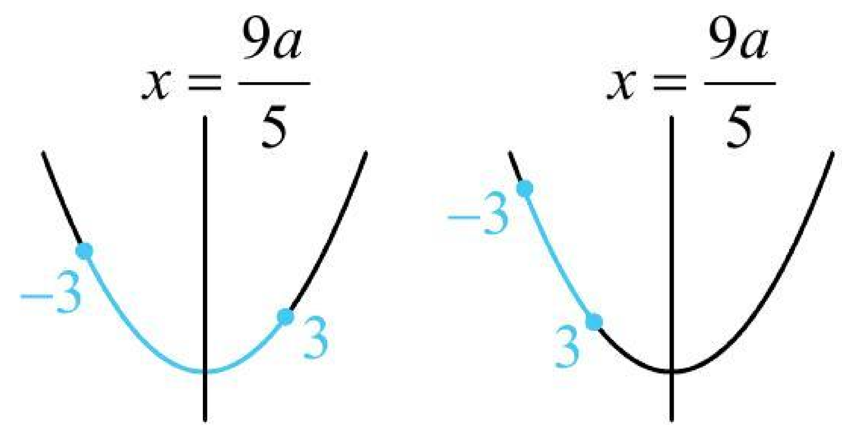



图1　　图2

8.（2022 • 河南模拟 • ★★★★）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的上、下顶点分别为 $A$ 和 $B$，点 $P(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 在椭圆 $C$ 上，若点 $Q(x_1,y_1)$ 满足 $AP\perp AQ$，$BP\perp BQ$，则 $\dfrac{x_1}{x_0}=$（　　）

（A）$-\dfrac{1}{3}$　（B）$-\dfrac{1}{2}$　（C）$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$-\dfrac{2}{3}$

**答案**：B

**解析**：如图，点 $Q$ 可以看成直线 $AQ$ 和 $BQ$ 的交点，于是写出这两条直线的方程，联立求交点，

由题意，$A(0,3)$，$B(0,-3)$，$k_{AP}=\dfrac{y_0-3}{x_0}$，$k_{BP}=\dfrac{y_0+3}{x_0}$，

因为 $AP\perp AQ$，$BP\perp BQ$，所以 $k_{AQ}=-\dfrac{x_0}{y_0-3}$，$k_{BQ}=-\dfrac{x_0}{y_0+3}$，



从而直线 $AQ$ 的方程为 $y=-\dfrac{x_0}{y_0-3}x+3$，直线 $BQ$ 的方程为 $y=-\dfrac{x_0}{y_0+3}x-3$，

联立 $\begin{cases} y=-\dfrac{x_0}{y_0-3}x+3 \\ y=-\dfrac{x_0}{y_0+3}x-3 \end{cases}$ 解得：$x=\dfrac{y_0^2-9}{x_0}$，故点 $Q$ 的横坐标 $x_1=\dfrac{y_0^2-9}{x_0}$，所以 $\dfrac{x_1}{x_0}=\dfrac{y_0^2-9}{x_0^2}$ ①，

要计算式①右侧的值，可利用椭圆方程来消元，

点 $P$ 在椭圆 $C$ 上 $\Rightarrow\dfrac{x_0^2}{18}+\dfrac{y_0^2}{9}=1\Rightarrow x_0^2=2(9-y_0^2)$，代入①得 $\dfrac{x_1}{x_0}=\dfrac{y_0^2-9}{2(9-y_0^2)}=-\dfrac{1}{2}$.